解析的トーションと三次元 CALABI-YAU多様体の不変量 (Analytic Geometry of the Bergman Kernel and Related Topics)

吉川, 謙一

数理解析研究所講究録
1487 巻 2006 年 167-174

解析的トーションと三次元 CALABI–YAU 多様体の不変量

吉川　謙一 (KEN-ICHI YOSHIKAWA)
東京大学 大学院数理科学研究科

1. 序

In this note, we explain the recent progress in the theory of analytic torsion for Calabi–Yau threefolds [12], [24], [25]. This note is based on the survey [23], and most of the statements in this note are included in [23], except those in Section 6. For this reason, we write this note in Japanese. The results in Sections 2 and 4 are based on the joint work [12] with Hao Fang and Zhiqin Lu.

ミラー対称性では, 3 次元 Calabi-Yau 多様体の解析的トーションから複素構造のみに依存する X の不変量 $F_1(X)$ が生ずると期待されている. この小文では, [4] と [12] に従い, 不変量 $F_1(X)$ の数学的定義を与える. 解析的トーションと Bott-Chern 類が $F_1(X)$ の主要な構成要素である. (第 2 節を参照.) 我々は $F_1(X)$ を $\tau_{\mathrm{BCOV}}(X)$ と記し, X の BCOV 不変量と呼ぶ. このとき, BCOV 不変量を Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間上の関数と見なすことができる.

論文 [3], [4] において, Bershadsky–Cecotti–大栗–Vafa はミラー対称性を用いて関数 τ_{BCOV} をミラー 5 次超曲面のモジュライ空間上で研究した. 彼らは $\mathbf{P}^4$ の一般の 5 次超曲面の楕円 Gromov–Witten 不変量の母関数として τ_{BCOV} が表示されることを予想した. (第 3 節を参照.) 論文 [12] において, 我々は関数 τ_{BCOV} をミラー 5 次超曲面のモジュライ空間上で具体的に書き下した. その結果, BCOV の予想はシンプレクティック幾何学の問題に還元されることとなった. (第 4 節を参照.)

一方で, Borcea [8] と Voisin [20] により研究された 3 次元 Calabi-Yau 多様体に対して, Harvey–Moore は関数 τ_{BCOV} をモジュライ空間上で考察した. 論文 [15] において, Harvey–Moore は Borcea–Voisin 型 Calabi–Yau 多様体に対して, 関数 τ_{BCOV} が或る一般 Kac–Moody 超代数の分母関数のノルムとして書けることを予想した. 論文 [24] において, 我々はこの Harvey–Moore の予想をある場合に確かめる. (第 5 節を参照.) また, このようにして τ_{BCOV} から得られる保型形式は, 不思議なことに Del Pezzo 曲面の幾何学を用いて良く記述できる. (第 6 節を参照.)

この小文では, BCOV 予想と Harvey–Moore 予想に関して我々が得た結果 [12], [24], [25] の一部を報告する. 第 2 節から第 5 節の内容は, 解説文 [23] と重複することをお断りしておく.

2. 三次元 Calabi–Yau 多様体と BCOV 不変量

$\overline{X}=(X,g)$ をコンパクト Kähler 多様体とし, γ をその Kähler 形式とする. X 上の (p,q)-形式に作用する $\overline{X}$ のラプラシアンを $\square_{p,q}$ で表し, $\square_{p,q}$ のスペクトル・ゼータ関数を $\zeta_{p,q}(s)$ で表す. Ray–Singer [19], Bismut–Gillet–Soulé [6], Bershadsky–Cecotti–Ooguri–Vafa [4] に従い, 以下のように定義する:

定義 2.1. $\overline{X}$ の BCOV トーションを以下の式で定める:

$$\mathcal{T}_{\mathrm{BCOV}}(\overline{X}) := \exp[-\sum_{p,q\geq 0}(-1)^{p+q}pq\,\zeta'_{p,q}(0)].$$

既約な n 次元非特異コンパクト Kähler 多様体は, 以下の条件をみたすとき Calabi–Yau 多様体と呼ばれる:

$$(1)\quad K_X \cong \mathcal{O}_X, \qquad (2)\quad H^q(X,\mathcal{O}_X)=0 \quad (0<q<n).$$

ここで, X の標準束を K_X で表した. X を n 次元 Calabi–Yau 多様体と仮定する. $\mathrm{Vol}(\overline{X})$ により $\overline{X}$ の体積を表す. また, $c_i(\overline{X})$ により (TX,g) の第 i 次 Chern 形式を表す. $\chi(X)=\int_X c_n(\overline{X})$ は X の位相的 Euler 数である. η を X 上の零を持たない正則 n-形式とする. η の L^2 ノルムを $\|\eta\|^2_{L^2}$ で表す. 以下の量を導入する:

$$\mathcal{A}(\overline{X}) := \mathrm{Vol}(\overline{X})^{\frac{\chi(X)}{12}}\exp\left[-\int_X \log\left(\frac{(\sqrt{-1})^{n^2}\eta\wedge\bar{\eta}}{\gamma^n/n!}\cdot\frac{\mathrm{Vol}(\overline{X})}{\|\eta\|^2_{L^2}}\right)\frac{c_n(\overline{X})}{12}\right].$$

Hodge 理論によれば, X の Kähler 類 $[\gamma]$ はコホモロジー $H^2(X,\mathbf{R})$ に L^2-計量を誘導する. $H^2(X,\mathbf{R})$ にこの計量を入れ, Euclid ベクトル空間と見なす. $H^2(X,\mathbf{Z})_{\mathrm{fr}} := H^2(X,\mathbf{Z})/\mathrm{Torsion}$ とおき, $\mathrm{Vol}_{L^2}(\overline{H^2(X,\mathbf{Z})})$ を実トーラス $H^2(X,\mathbf{R})/H^2(X,\mathbf{Z})_{\mathrm{fr}}$ の体積とする.

定義 2.2. $\dim X=3$ のとき, X の BCOV 不変量を以下の式で定める:

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(X) := \frac{\mathcal{A}(\overline{X})\,\mathcal{T}_{\mathrm{BCOV}}(\overline{X})}{\mathrm{Vol}(\overline{X})^3\,\mathrm{Vol}_{L^2}(\overline{H^2(X,\mathbf{Z})})}.$$

Quillen 計量の曲率公式 [6] から, 以下の定理が成り立つ (cf. [12]):

定理 2.3. $\dim X=3$ のとき, $\tau_{\mathrm{BCOV}}(X)$ は X の *Kähler* 計量に依存しない. 特に, $\tau_{\mathrm{BCOV}}(X)$ は X の不変量である.

計量 g が Ricci 平坦のとき, $\mathcal{A}(\overline{X})=\mathrm{Vol}(\overline{X})^{\frac{\chi(X)}{12}}$ であり, $\tau_{\mathrm{BCOV}}(X)$ は $\mathrm{Vol}(\overline{X})$ と $\mathrm{Vol}_{L^2}(\overline{H^2(X,\mathbf{Z})})$ を除けば $\overline{X}$ の BCOV トーションに一致する. 特に Kähler 類を有理的に選べば, すなわち偏極 3 次元 Calabi–Yau 多様体を考えれば, $\tau_{\mathrm{BCOV}}(\overline{X})$ は実質的に X の Ricci 平坦 Kähler 計量に関する BCOV トーションである.

3 次元 Calabi–Yau 多様体 X, X' が双有理同値のとき, $h^{p,q}(X)=h^{p,q}(X')$, $p,q\geq 0$ が知られている. 以下の予想はこの事実の類似である.

予想 2.4. 3 次元 Calabi–Yau 多様体 X, X' が双有理同値ならば,

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(X)=\tau_{\mathrm{BCOV}}(X').$$

次節で述べるミラー 5 次超曲面の場合には, 予想 2.4 はある普遍定数倍を除いて正しい. その普遍定数はミラー 5 次超曲面の構成に際して用いる crepant 特異点解消の選び方のみに依存する. この場合でも普遍定数を決定することは難しい.

3. ミラー対称性と BCOV 予想

$\mathbf{P}^4$ の 5 次超曲面のペンシル

$$p\colon \mathcal{X}=\{([z],\psi)\in\mathbf{P}^4\times\mathbf{P}^1;\ F_\psi(z)=0\}\ni([z],\psi)\to\psi\in\mathbf{P}^1$$

を, 以下の方程式で定める:

$$F_\psi(z) := z_0^5+z_1^5+z_2^5+z_3^5+z_4^5-5\psi\,z_0z_1z_2z_3z_4.$$

ここで, ψ は $\mathbf{P}^1$ の非同次座標である. $\psi \in \mathbf{P}^1$ に対して, $X_\psi := p^{-1}(\psi)$ とおく. パラメータが $\psi^5 \neq 1, \infty$ のとき, X_ψ は 3 次元 Calabi–Yau 多様体である. Ω_ψ を以下の式で定まる X_ψ 上の正則 3-形式とする:

$$\Omega_\psi := \left(\frac{2\pi i}{5}\right)^{-3} 5\psi \, \frac{dz_0 \wedge dz_1 \wedge dz_2}{\partial F_\psi(z)/\partial z_3}.$$

$|\psi| \gg 1$ のとき, 関数 $y_0(\psi)$ を次の式で定める:

$$y_0(\psi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n)!}{(n!)^5 (5\psi)^{5n}}.$$

湯川結合と呼ばれる $T\mathbf{P}^1$ 上の三次形式を以下の式で定める:

$$\kappa_B\left(\frac{d}{d\psi}, \frac{d}{d\psi}, \frac{d}{d\psi}\right) := \int_{X_\psi} \frac{\Omega_\psi}{y_0(\psi)} \wedge \frac{\partial^3}{\partial\psi^3}\left(\frac{\Omega_\psi}{y_0(\psi)}\right) = \left(\frac{2\pi i}{5}\right)^3 \frac{5\psi^2}{1-\psi^5} \cdot \frac{1}{y_0(\psi)^2}.$$

$\mathfrak{H}$ を複素上半平面とする. $t \in \mathfrak{H}$ に対して, $q := e^{2\pi i t}$ を単位円盤のパラメータとする. $N_g(d)$ により, $\mathbf{P}^4$ の一般の 5 次超曲面の種数 g かつ次数 d の Gromov–Witten 不変量を表す. 量子カップ積を以下の式により定める:

$$\kappa_A\left(\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt}, \frac{d}{dt}\right) := 5 + \sum_{d=1}^{\infty} N_0(d) \, \frac{d^3 q^d}{1-q^d}.$$

ミラー写像とは, 以下の式で与えられるパラメータ ψ^5 と q の同一視のことである:

$$q := (5\psi)^{-5} \exp\left(\frac{5}{y_0(\psi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n)!}{(n!)^5} \left\{\sum_{j=n+1}^{5n} \frac{1}{j}\right\} \frac{1}{(5\psi)^{5n}}\right). \tag{3.1}$$

以下の等式が Candelas–de la Ossa–Green–Parkes [11] により予想され, Givental [13], Lian–Liu–Yau [17] により証明された:

定理 3.1. 同一視 (3.1) の下で, 以下の等式が成り立つ:

$$\kappa_A\left(\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt}, \frac{d}{dt}\right) = \left(2\pi i \, q \frac{d\psi}{dq}\right)^3 \kappa_B\left(\frac{d}{d\psi}, \frac{d}{d\psi}, \frac{d}{d\psi}\right).$$

Bershadsky–Cecotti–大栗–Vafa は, 以下に述べる形で Candelas–de la Ossa–Green–Parkes のミラー対称性予想を楕円 Gromov–Witten 不変量 $\{N_1(d)\}_{d \geq 1}$ に拡張した.

$\mathbf{Z}_5 = \{\zeta \in \mathbf{C};\, \zeta^5 = 1\}$ を位数 5 の巡回群し, $\mathcal{X}$ の自己同形群 G を次式で定義する:

$$G := \{[\mathrm{diag}(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)] \in PSL(\mathbf{C}^5);\, a_i \in \mathbf{Z}_5\}.$$

G は $\mathcal{X}$ のファイバーを保つので, Calabi–Yau 軌道体 X_ψ/G をファイバーとする族 $p\colon \mathcal{X}/G \to \mathbf{P}^1$ が誘導される. $\mathcal{D}^* = \mathbf{Z}_5 \subset \mathbf{C}$ とおき, $\mathcal{D} := \mathcal{D}^* \cup \{\infty\}$ と定める.

定義 3.2. $f\colon \mathcal{W} \to \mathcal{X}/G$ を $\mathcal{X}/G$ の特異点解消とし, $\pi := p \circ f$ おく. 以下の条件 (1), (2) が成り立つとき, $\pi\colon \mathcal{W} \to \mathbf{P}^1$ はミラー 5 次超曲面族と呼ばれる:
(1) 任意の $\psi \in \mathbf{P}^1 \setminus \mathcal{D}$ に対して, f により誘導されるファイバー間の写像 $f_\psi\colon W_\psi = \pi^{-1}(\psi) \to X_\psi/G$ は特異点解消であり, さらに $K_{W_\psi} \cong \mathcal{O}_{W_\psi}$ が成り立つ.
(2) $\psi \in \mathcal{D}^*$ ならば, W_ψ の特異点 $\mathrm{Sing}\, W_\psi$ は唯一の通常二重点のみから成る.

[18] によれば, ミラー 5 次超曲面族が存在する. (しかし, その選び方は一意的ではない.) Ω_ψ の G-不変性から, Ω_ψ と対応する X_ψ/G 上の正則 3-形式を同一視する. W_ψ 上の正則 3-形式 Ξ_ψ を

$$\Xi_\psi := f_\psi^* \Omega_\psi$$

で定める. $K_{\mathcal{W}/\mathbf{P}^1}$ を族 $\pi\colon \mathcal{W} \to \mathbf{P}^1$ の相対標準束とする. 定理 3.1 より, 直線束 $\pi_* K_{\mathcal{W}/\mathbf{P}^1}$ と $T\mathbf{P}^1$ は, 無限遠 $\psi = \infty$ の近傍でそれぞれ以下の切断

$$\Xi_\psi / y_0(\psi), \qquad d/dt = 2\pi i\, q\, (d/dq) = 2\pi i\, q\, (d\psi/dq)\, (d/d\psi)$$

により自明化される. 関数 $\widetilde{\eta}(q)$ を以下の式で定める:

$$\widetilde{\eta}(q) := \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n).$$

[3], [4] において, Bershadsky–Cecotti–Ooguri–Vafa は以下の等式を予想した:

予想 3.3. ミラー写像 (3.1) によるパラメータの同一視の下で, 定数倍を除いて, 以下の等式が無限遠 $\psi = \infty$ の近傍で成立する:

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(W_\psi) = \left\| \left\{ q^{\frac{25}{12}} \prod_{d=1}^{\infty} \widetilde{\eta}(q^d)^{N_1(d)} (1 - q^d)^{\frac{N_0(d)}{12}} \right\}^2 \left(\frac{\Xi_\psi}{y_0(\psi)} \right)^{\frac{62}{3}} \otimes q \frac{d}{dq} \right\|^2 .$$

ここで, $\pi_* K_{\mathcal{W}/\mathbf{P}^1}$ には L^2-計量を入れ, $T\mathbf{P}^1$ には Weil–Petersson 計量を入れる.

予想 3.3 は以下の 2 つの予想 A と B に分けられる. ミラー写像 (3.1) によるパラメータの同一視の下で, 2 つの関数 $F_{1,B}^{\mathrm{top}}(\psi)$ と $F_{1,A}^{\mathrm{top}}(q)$ を以下のように定める:

$$F_{1,B}^{\mathrm{top}}(\psi) := \left(\frac{\psi}{y_0(\psi)} \right)^{\frac{62}{3}} (\psi^5 - 1)^{-\frac{1}{6}}\, q \frac{d\psi}{dq}, \qquad F_{1,A}^{\mathrm{top}}(q) := F_{1,B}^{\mathrm{top}}(\psi(q)).$$

予想 3.4. (A) 以下の等式が成り立つ:

$$q \frac{d}{dq} \log F_{1,A}^{\mathrm{top}}(q) = \frac{50}{12} - \sum_{n,d=1}^{\infty} N_1(d) \frac{2nd\, q^{nd}}{1 - q^{nd}} - \sum_{d=1}^{\infty} N_0(d) \frac{2d\, q^d}{12(1 - q^d)}.$$

(B) 定数倍を除いて, 以下の等式が $\psi = \infty$ の近傍で成り立つ:

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(W_\psi) = \left\| \frac{1}{F_{1,B}^{\mathrm{top}}(\psi)} \left(\frac{\Xi_\psi}{y_0(\psi)} \right)^{\frac{62}{3}} \otimes q \frac{d}{dq} \right\|^2 .$$

予想 (B) の成立は [12] で示された. 結局, 予想 3.3 を解決するには, シンプレクティック幾何学に属する予想 (A) を確かめればよい. 予想 (A) については, [16] を参照.

4. BCOV 不変量の明示公式

$\mathcal{Y}$ を非特異とは限らない射影的 4 次元代数多様体とし, $\pi\colon \mathcal{Y} \to \mathbf{P}^1$ を正則平坦全射とする. ファイバーを $Y_\psi := \pi^{-1}(\psi)$ で表す. $\mathcal{D} := \{\psi \in \mathbf{P}^1;\ \mathrm{Sing}\, Y_\psi \neq \emptyset\}$ を判別式軌跡, その部分軌跡を $\mathcal{D}^* := \{\psi \in \mathcal{D};\ \mathrm{Sing}\, Y_\psi$ は唯一の通常二重点から成る $\}$ とする.

第 4 節では以下の条件 (i), (ii), (iii) を常に仮定する:

(i) $\mathcal{D}^*$ は $\mathbf{P}^1$ の空でない有限部分集合であり, $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^* = \{\infty\}$ が成り立つ.
(ii) $\psi \in \mathbf{P}^1 \setminus \mathcal{D}$ ならば, Y_ψ は $h^2(\Omega^1_{Y_\psi}) = 1$ をみたす 3 次元 Calabi–Yau 多様体.
(iii) $\psi \in \mathcal{D}^*$ ならば, Y_ψ は $h^2(\Omega^1_{Y_\psi}) = 1$ をみたす特異 3 次元 Calabi–Yau 多様体.

$\psi \in \mathbf{P}^1 \setminus \{\infty\}$ に対して, $(\mathrm{Def}(Y_\psi), [Y_\psi])$ を Y_ψ の倉西空間とする. 倉西空間の普遍性から, 解析空間の芽の写像 $\mu_\psi\colon (\mathbf{P}^1, \psi) \to (\mathrm{Def}(Y_\psi), [Y_\psi])$ が存在して, 変形芽 $\pi\colon (\mathcal{Y}, Y_\psi) \to (\mathbf{P}^1, \psi)$ は μ_ψ により倉西空間 $(\mathrm{Def}(Y_\psi), [Y_\psi])$ 上の普遍族から誘導さ

れる. 条件 (i) から, μ_ψ は定置写像ではない. 条件 (ii) から, $(\mathrm{Def}(Y_\psi), [Y_\psi]) \cong (\mathbf{C}, 0)$ である. $r(\psi) \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ を写像 μ_ψ の ψ における分岐指数と定義する. 点集合 $\{D_k\}_{k\in K}$ と $\{R_j\}_{j\in J}$ を, $\mathcal{D}^* = \{D_k\}_{k\in K}$ と $\{\psi \in \mathbf{P}^1 \setminus \{\infty\}; r(\psi) > 1\} = \{R_j\}_{j\in J}$ で定める.

Ξ を $\mathbf{P}^1$ 上で定義された $\pi_* K_{\mathcal{Y}/\mathbf{P}^1}$ の有理型切断とし, その因子を

$$\mathrm{div}(\Xi) = \sum_{i\in I} m_i P_i + m_\infty P_\infty$$

と書く. ここで, $i \in I$ に対して $P_i \neq P_\infty$ である. P_i, R_j, D_k をそれぞれの座標 $\psi(P_i), \psi(R_j), \psi(D_k)$ と同一視する. χ を一般ファイバー Y_ψ の位相的 Euler 数とする.

定理 4.1. $\mathbf{P}^1$ 上の関数として, 以下の等式が定数倍を除き成り立つ:

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(Y_\psi) = \left\| \prod_{i\in I, j\in J, k\in K} \frac{(\psi - D_k)^{\frac{r(D_k)}{6}}}{(\psi - P_i)^{\frac{(48+\chi)m_i}{12}} (\psi - R_j)^{r(R_j)-1}} \Xi_\psi^{\frac{48+\chi}{12}} \otimes \frac{d}{d\psi} \right\|^2.$$

証明の詳細は [12], [22] を参照. 定理の証明では, Quillen 計量の理論 [5], [6], [7] が活躍する. 定理 4.1 をミラー 5 次超曲面族 $\pi\colon \mathcal{W} \to \mathbf{P}^1$ に適用すれば, 以下の結果が得られる [12].

定理 4.2. 予想 *(B)* が成り立つ. すなわち, 以下の等式が $\mathbf{P}^1$ 上で成り立つ:

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(W_\psi) = \mathrm{Const.} \left\| \psi^{-\frac{62}{3}} (\psi^5 - 1)^{\frac{1}{6}} (\Xi_\psi)^{\frac{62}{3}} \otimes \frac{d}{d\psi} \right\|^2.$$

5. BCOV 不変量と Borcherds 積

S を $K3$ 曲面, すなわち 2 次元 Calabi–Yau 多様体とする. 符号 $(3, 19)$ の偶ユニモジュラー格子 $\mathbb{L}_{K3}$ を固定する. $H^2(S, \mathbf{Z})$ にカップ積を入れて格子と見なしたものは, $\mathbb{L}_{K3}$ に等長である. 第 5 節では, S の対合 $\theta\colon S \to S$ であって $H^0(S, K_S)$ に非自明に作用するものの存在を仮定する. この条件から, $\theta^* = -1$ が $H^0(S, K_S)$ 上で成り立ち, S が代数的 $K3$ 曲面であることも従う. T を楕円曲線とする. T の対合 $-1_T\colon T \to T$ を, $-1_T(x) = -x$ により定める. このとき, $S \times T$ 上の対合 $(\theta, -1_T)$ は, $H^0(S \times T, K_{S\times T})$ に自明に作用する. 位数 2 の巡回群を $\mathbf{Z}_2$ とする, i.e., $\mathbf{Z}_2 := \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. $\mathbf{Z}_2$ の生成元をそれぞれ θ, -1_T, $(\theta, -1_T)$ と同一視することにより, 群 $\mathbf{Z}_2$ が S, T, $S \times T$ に作用する. 以下, 格子に関する用語は [21] に従う.

以上の設定から, Borcea [8] と Voisin [20] は Calabi–Yau 多様体を構成した:

定義 5.1. 対合を持つ $K3$ 曲面 (S, θ) と楕円曲線 T に対して, 軌道体 $S \times T/\mathbf{Z}_2$ の $\mathrm{Sing}\,(S \times T/\mathbf{Z}_2)$ に沿うブローアップとして得られる 3 次元 Calabi–Yau 多様体を $X_{(S,\theta,T)}$ とする.

$\pi_1\colon X_{(S,\theta,T)} \to S/\mathbf{Z}_2$ と $\pi_2\colon X_{(S,\theta,T)} \to T/\mathbf{Z}_2$ を, 自然な射影 $\mathrm{pr}_1\colon S \times T \to S$, $\mathrm{pr}_2\colon S \times T \to T$ から誘導される射影とする. 3 つ組 $(X_{(S,\theta,T)}, \pi_1, \pi_2)$ を (S, θ, T) に付随する Borcea–Voisin 多様体と呼ぶ. 2 つの Borcea–Voisin 多様体 $(X_{(S,\theta,T)}, \pi_1, \pi_2)$ と $(X_{(S',\theta',T')}, \pi_1', \pi_2')$ が同型になるのは, 複素多様体の同型

$$f\colon X_{(S,\theta,T)} \to X_{(S',\theta',T')}, \qquad g\colon S/\mathbf{Z}_2 \to S'/\mathbf{Z}_2, \qquad h\colon T/\mathbf{Z}_2 \to T'/\mathbf{Z}_2$$

が存在して, 以下の条件が成り立つこととする:

$$\pi_1' \circ f = g \circ \pi_1, \qquad \pi_2' \circ f = h \circ \pi_2.$$

定義 5.2. Λ を $\mathbb{L}_{K3}$ の階数 $r(\Lambda)$ の原始的 2-elementary 部分格子で, 符号 $(2, r(\Lambda) - 2)$ を持つものとする. Borcea–Voisin 多様体 $(X_{(S,\theta,T)}, \pi_1, \pi_2)$ の型が Λ であるとは, $H^2_-(S, \mathbf{Z}) := \{l \in H^2(S, \mathbf{Z}); \theta^* l = -l\} \cong \Lambda$ が成り立つこととする.

$X_{(S,\theta,T)}$ が Λ 型 Borcea–Voisin 多様体のとき, (S,θ) は [21] の意味で $\Lambda^{\perp}$ 型 2-elementary$K3$ 曲面である. $\Lambda^{\perp}$ 型 2-elementary$K3$ 曲面の周期領域は以下の集合で与えられる:

$$\Omega_{\Lambda} := \{[\eta] \in \mathbf{P}(\Lambda \otimes \mathbf{C});\ \langle \eta, \eta \rangle_{\Lambda} = 0,\ \langle \eta, \bar{\eta} \rangle_{\Lambda} > 0\}.$$

Ω_{Λ} は 2 つの連結成分 Ω_{Λ}^{+}, Ω_{Λ}^{-} から成る. $D_{IV,n}$ を n 次元の IV 型対称有界領域とすれば, $D_{IV,n} \cong \Omega_{\Lambda}^{\pm}$ である. 格子 Λ の自己同型群を $O(\Lambda)$ とすれば, $O(\Lambda)$ は周期領域 Ω_{Λ} に射影的に作用する. $\Omega_{\Lambda}^{\pm}$ を保つ $O(\Lambda)$ の部分群を $O^{+}(\Lambda)$ とすれば, $O^{+}(\Lambda)$ は $O(\Lambda)$ の指数 2 の部分群である. 以下の主張を示すことができる [21]:

定理 5.3. *Λ 型 Borcea–Voisin 多様体のモジュライ空間は, 以下の局所対称空間の或る稠密 Zariski 開集合に同型である:*

$$(O^{+}(\Lambda)\backslash D_{IV,r(\Lambda)-2}) \times (SL_2(\mathbf{Z})\backslash \mathfrak{H}).$$

1_m を $m \times m$-単位行列とし, $\mathbb{I}_{1,m}(2) := 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1_m \end{pmatrix}$ とする. 行列 $\mathbb{I}_{1,m}(2)$ を対応する双曲型格子と同一視する. $1 \le m \le 9$ のとき,

$$\mathbb{T}_m := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{I}_{1,m-1}(2)$$

とおき, やはり対応する符号 $(2,m)$, 階数 $m+2$ の格子と同一視する. $C_{\mathbb{I}_{1,m-1}(2)}$ を双曲型ベクトル空間 $\mathbb{I}_{1,m-1}(2) \otimes \mathbf{R}$ の光錐とするとき, 正則同型

$$\Omega_{\mathbb{T}_m} \cong \mathbb{I}_{1,m-1}(2) \otimes \mathbf{R} + i\, C_{\mathbb{I}_{1,m-1}(2)}$$

が存在して, $\Omega_{\mathbb{T}_m}$ の管状領域表示を与える. $C_{\mathbb{I}_{1,m-1}(2)}$ の Weyl 部屋で, Weyl ベクトル

$$\rho_m := \frac{1}{2}(3, -1, \cdots, -1) \in \mathbb{I}_{1,m-1}(2)^{\vee}$$

を含むものを W_m とする. ここで, $\mathbb{I}_{1,m-1}(2)^{\vee} \subset \mathbb{I}_{1,m-1}(2) \otimes \mathbf{Q}$ は $\mathbb{I}_{1,m-1}(2)$ の双対格子を表す. ρ_m の幾何学的意味は第 6 節で明らかとなる.

$D_{IV,m}$ または $\mathfrak{H}$ 上の保型形式 Ψ に対して, その Petersson ノルムを $\|\Psi\|$ で表す. 以下の主張を示すことができる [24], [25]:

定理 5.4. *整数 m は $3 \le m \le 9$ の範囲にあるとする. $D_{IV,m}$ 上の $O^{+}(\mathbb{T}_m)$ に関する重さ $14-m$ の保型形式 Φ_m が存在して, 以下の性質をみたす:*
(1) 任意の $\mathbb{T}_m$ 型 Borcea–Voisin 多様体 $(X_{(S,T)}, \pi_1, \pi_2)$ に対して,

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(X_{(S,\theta,T)}) = \|\Phi_m(\varpi(S,\theta))\|^2\, \|\Delta(\varpi(T))\|^2. \tag{5.1}$$

ここで, $\varpi(S,\theta) \in O^{+}(\mathbb{T}_m)\backslash D_{IV,m}$ と $\varpi(T) \in SL_2(\mathbf{Z})\backslash \mathfrak{H}$ はそれぞれ (S,θ) と T の周期を表し, $\Delta(\tau)$ は Jacobi の Δ-関数を表す.
(2) 定数倍を除いて, Φ_m を分母関数とする一般 Kac–Moody 超代数が存在する.
(3) 虚部が十分大きい $z \in \mathbb{I}_{1,m-1}(2) \otimes \mathbf{R} + i\, W_m$ に対して, 以下の等式が定数倍を除いて成り立つ:

$$\Phi_m(z) = e^{2\pi i\, \rho_m \cdot z} \prod_{\delta \in \{0,1\}} \prod_{\mathbf{r} \in (\delta \rho_m + \mathbb{I}_{1,m-1}(2)) \cap W_m^{\vee}} \left(1 - e^{2\pi i\, \mathbf{r} \cdot z}\right)^{c_m^{(\delta)}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}/2)}. \tag{5.2}$$

ここで, $W_m^{\vee} \subset \mathbb{I}_{1,m-1}(2) \otimes \mathbf{R}$ は Weyl 部屋 W_m の双対錐を表し, 数列 $\{c_m^{(\delta)}(l)\}_{l \in \mathbf{Z}+\delta/4}$, $\delta = 0, 1$ は以下の母関数により与えられる:

$$\sum_{l \in \mathbf{Z}+\delta/4} c_m^{(\delta)}(l)\, q^l := \begin{cases} \eta(\tau)^{-8}\eta(2\tau)^{8}\eta(4\tau)^{-8}\, \theta_{\mathbb{A}_1}(\tau)^{10-m} & (\delta = 0), \\ -8\,\eta(4\tau)^{8}\eta(2\tau)^{-16}\, \theta_{\mathbb{A}_1+1/2}(\tau)^{10-m} & (\delta = 1). \end{cases} \tag{5.3}$$

ここで, $\eta(\tau)$ は *Dedekind* η-関数であり, $\theta_{\mathbb{A}_1+\delta/2}(\tau) := \sum_{m\in\mathbf{Z}+\delta/2} q^{m^2}$ である.

注意 5.5. 定理 5.4 は Harvey–Moore 予想 [15, Sec. 7] に対する部分的な肯定的解答を与える. 格子が $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{I}_{1,9}(2)$ のとき, Λ 型 Borcea–Voisin 多様体に対して, モジュライ空間上の関数の等式 (5.1) の類似が示されている. この場合, Φ_m は Borcherds の Φ-関数 [9] で置き換えられる. 詳細は文献 [12], [15], [21] を参照.

6. 保型形式 Φ_m の Del Pezzo 曲面を用いた表示

最近, 筆者は (5.2) の無限積を Del Pezzo 曲面の幾何学を用いて書き表せることに気付いた. この事実は面白いと思うので, 関連しそうな話題と一緒に記す. より詳細な解説は稿を改めて行いたい.

非特異代数曲面はその反標準類が豊富なとき, Del Pezzo 曲面と呼ばれる. Del Pezzo 曲面は $\mathbf{P}^2$ の 8 点以下の点のブローアップか, または $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ に同型である. Del Pezzo 曲面の次数とは, 反標準因子の自己交点数のことである. Del Pezzo 曲面の次数は, 1 から 9 までの整数値をすべて取る.

V を次数 $\deg V$ の Del Pezzo 曲面とし, $\mathcal{K}_V \subset H^2(V,\mathbf{R})$ をその Kähler 錐とする. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を $H^2(V,\mathbf{Z})$ 上のカップ積とする.

定理 6.1. *Del Pezzo* 曲面 V に対して, V の複素化された *Kähler* 錐 $H^2(V,\mathbf{R}) + i\,\mathcal{K}_V$ 上で以下の無限積を考える:

(5.4)

$$\Phi_V(z) := e^{\pi i\langle c_1(V),z\rangle} \prod_{\delta\in\mathbf{Z}_2} \prod_{L\in\mathrm{Eff}(V),\, c_1(L)\equiv\delta c_1(V) \pmod 2} (1 - e^{\pi i\langle c_1(L),z\rangle})^{c^{(\delta)}_{\deg V}(c_1(L)^2/4)}.$$

ここで, $\mathrm{Eff}(V)$ は V 上の有効直線束の同形類全体を表す. このとき, 以下の主張が成り立つ:

(1) z の虚部のノルムが十分大きいとき, $\Phi_V(z)$ は絶対収束する.

(2) $\Phi_V(z)$ は *Del Pezzo* 曲面の全コホモロジー格子

$$H(V,\mathbf{Z}) := H^0(V,\mathbf{Z}) \oplus H^2(V,\mathbf{Z}) \oplus H^4(V,\mathbf{Z})$$

に付随する *IV* 型領域 $\Omega_{H(V,\mathbf{Z})}$ 上の群 $O^+(H(V,\mathbf{Z}))$ に関する重さ $\deg V + 4$ の保型形式に拡張する. $\Phi_V(z)$ の零因子は, $H(V,\mathbf{Z})$ のノルム -1 ベクトルが定める $\Omega_{H(V,\mathbf{Z})}$ の超平面全体である.

(3) 等式 $\Phi_V(z) = \Phi_{10-\deg V}(z/2)$ が成立する.

定理 6.1 の証明は [25] で与える. 定理 6.1 から, 公式 (5.1) は, Borcherds の例 [10, Example 15.2] において, $K3$ 曲面を Del Pezzo 曲面に置き換えた場合の類似と見ることができる. 関連して, Del Pezzo 曲面 V に対して, モジュラー多様体

$$\Omega_{H(V,\mathbf{Z})}/O^+(H(V,\mathbf{Z}))$$

(またはその適当な Zariski 開集合) には特別な物理的意味があるのであろうか? V が $K3$ 曲面のとき, 同様に定義される空間は $K3$ 曲面上の共形不変非線形 σ 模型のモジュライ空間であると [1, Th. 6] に主張されている. [2] にも関連する話題がある.

無限積 (5.4) において, 楕円モジュラー形式 (5.3) 以外の情報はすべて Del Pezzo 曲面の幾何学を用いて記述されている. 楕円モジュラー形式 (5.3) の幾何学的な意味は何であろうか? Λ が注意 5.5 で扱った格子の場合には, 楕円モジュラー形式 (5.3) は $E_8 \times E_8$ を構造群とする $K3$ 曲面上のベクトル束の楕円種数 (又はその一般化) として理解できるとの記述が [14] にある. 楕円モジュラー形式 (5.3) を Del Pezzo 曲面あるいはその上のベクトル束の幾何学を用いて理解することは可能であろうか?

吉川 謙一 (KEN-ICHI YOSHIKAWA) 東京大学 大学院数理科学研究科

REFERENCES

[1] Aspinwall, P. *K3 surfaces and string duality*, Surveys in Differential Geometry **5** (1999), 1–95

[2] Aspinwall, P., Morrison, D. *String theory on K3 surfaces*, Mirror Symmetry II (1997), 703–716

[3] Bershadsky, M., Cecotti, S., Ooguri, H., Vafa, C. *Holomorphic anomalies in topological field theories*, Nuclear Phys. B **405** (1993), 279–304

[4] ——— *Kodaira–Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes*, Commun. Math. Phys. **165** (1994), 311–427

[5] Bismut, J.-M. *Quillen metrics and singular fibers in arbitrary relative dimension*, Jour. Algebr. Geom. **6** (1997), 19–149

[6] Bismut, J.-M., Gillet, H., Soulé, C. *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles I,II,III*, Commun. Math. Phys. **115** (1988), 49–78, 79–126, 301–351

[7] Bismut, J.-M., Lebeau, G. *Complex immersions and Quillen metrics*, Publ. Math. IHES **74** (1991), 1–297

[8] Borcea, C. *K3 surfaces with involution and mirror pairs of Calabi–Yau manifolds*, Mirror Symmetry II (B. Green and S.-T. Yau eds) AMS/International Press (1997), 717–743

[9] Borcherds, R.E. *The moduli space of Enriques surfaces and the fake monster Lie superalgebra*, Topology **35** (1996), 699–710

[10] ——— *Automorphic forms with singularities on Grassmannians*, Invent. Math. **132** (1998), 491–562

[11] Candelas, P., de la Ossa, X., Green, P., Parkes, L. *A pair of Calabi–Yau manifolds as an exactly solvable superconformal field theory*, Nuclear Phys. B **407** (1993), 115–154

[12] Fang, H., Lu, Z., Yoshikawa, K.-I. *Analytic torsion for Calabi–Yau threefolds*, preprint, arXiv:math.DG/0601411 (2006)

[13] Givental, A. *Equivariant Gromov–Witten invariants*, IMRN **13** (1996), 613–663

[14] Harvey, J., Moore, G. *Algebras, BPS states, and strings*, Nuclear Phys. **B 463** (1996), 315–368

[15] ——— *Exact gravitational threshold correction in the Ferrara–Harvey–Strominger–Vafa model*, Phys. Rev. D **57** (1998), 2329–2336

[16] Li, J., Zinger, A. *On the genus-one Gromov–Witten invariants of complete intersection threefolds*, math.AG/0406105 (2004)

[17] Lian, B., Liu, K., Yau, S.-T. *Mirror principle I*, Asian Jour. Math. **1** (1997), 729–763

[18] Morrison, D. *Mirror symmetry and rational curves on quintic threefolds: A quick guide for mathematicians*, Jour. Amer. Math. Soc. **6** (1993), 223-247

[19] Ray, D.B., Singer, I.M. *Analytic torsion for complex manifolds*, Ann. of Math. **98** (1973), 154–177

[20] Voisin, C. *Miroirs et involutions sur les surfaces K3*, Journée de Géométrie Algébrique d'Orsay (Orsay, 1992), Astérisque **218** (1993), 273–323

[21] Yoshikawa, K.-I. *K3 surfaces with involution, equivariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space*, Invent. Math. **156** (2004), 53–117

[22] ——— *On the singularity of Quillen metrics*, preprint, arXiv:math.DG/0601426 (2006)

[23] ——— *Analytic Torsion and an invariant of Calabi–Yau threefold*, Proceeding of the XXIII International Conference of Differential Geometric Methods in Theoretical Physics, World Scientific Publishing (2006) to appear

[24] ——— *Borcea–Voisin threefolds, analytic torsion, and Borcherds products*, in preparation

[25] ——— *K3 surfaces with involution, equivariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space II*, in preparation